E.N.S.I. de PHYSIQUE option P session 1987

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986 .

Soit K un corps. $M_n(K)$ désigne l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K , I la matrice unité, $GL(n,K)$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(K)$ et $SL(n,K)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. Si $A \in M_n(K)$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A , $tr(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A. On appelle commutateur tout élément de la forme $UVU^{-1}V^{-1}$, où U et V appartiennent à $GL(n,K)$. Un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal si quels que soient $h \in H$, $g \in G$, ghg^{-1} appartient à H. On note C le corps des nombres complexes et R celui des nombres réels.

I

1. Caractérisation des matrices semblables dans $M_2(C)$.

1. a - Soit $A \in M_2(C)$. Montrer qu'il existe $P \in GL(2,C)$ tel que $B = PAP^{-1}$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \in C.$$

1. b - En déduire que si A_1 et A_2 , éléments de $M_2(C)$, ne sont pas de la forme aI , $a \in C$, alors A_1 et A_2 sont semblables, si et seulement si, $tr(A_1) = tr(A_2)$ et $det(A_1) = det(A_2)$.

2. Caractérisation des commutateurs dans $M_2(C)$.

2. a - Vérifier que si A est un commutateur, alors PAP^{-1} est un commutateur quel que soit $P \in GL(2,C)$.

2. b - Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ où $i^2 = -1$. Calculer $UVU^{-1}V^{-1}$.

2. c - Soit $a \neq 0$ un nombre complexe tel que $a^2 \neq 1$. Calculer pour $b \in C$, $tr(X(b))$ où

$$X(b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+1 & -b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire que si $A \neq \pm I$ est une matrice de déterminant égal à 1 , alors il existe $b \in C$ tel que A soit semblable à $X(b)$.

2. d - Pour $A \in M_2(C)$, démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\det A = 1$;

(ii) $A = UVU^{-1}V^{-1}$, où U et V appartiennent à $SL(2,C)$.

3. Décomposition en produit de deux matrices symétriques dans $M_2(C)$.

3. a - Soit $A \in M_2(C)$. Montrer qu'il existe $P \in GL(2,C)$ tel que $A = PSP^{-1}$ où S est une matrice symétrique.

3. b - Montrer que $A = S_1S_2$ où S_1 et S_2 sont des matrices symétriques et où S_2 est inversible. (On pourra introduire la matrice $PS\,{}^tP$).

4. Sous-groupes normaux de $SL(2,C)$.

4. a - Soit H un sous-groupe normal de $SL(2,C)$ contenant une matrice $A \neq \pm I$. Montrer que H contient une matrice de l'une des deux formes suivantes :

$$X_o = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad , \lambda^2 \neq 1 \; ; \; X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. b - Pour $c \neq 0$ et $a \in C$, montrer que la matrice $Z(c)$ suivante est diagonalisable :

$$Z(c) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } a^2+c^2 = 1.$$

En déduire que H contient toujours une matrice de la forme X_o.

4. c - Montrer que $H = SL(2,C)$ et déterminer tous les sous-groupes normaux de $SL(2,C)$. (On pourra utiliser les matrices $X(b)$ introduites dans 2.c)

5. Caractérisation des matrices semblables dans $M_2(R)$.

5. a - Soit $P+iQ$ une matrice inversible de $M_2(C)$ où P et Q appartiennent à $M_2(R)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in R$ tel que $P+\lambda Q$ soit inversible. En déduire que deux matrices de $M_2(R)$ semblables dans $M_2(C)$, sont semblables dans $M_2(R)$.

Tournez la page S. V. P.

5. b - Soit $A \in M_2(R)$. Montrer qu'il existe $P \in GL(2,C)$ tel que $B = PAP^{-1}$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où λ , λ_1 , λ_2 , a et b appartiennent à R.

5. c - En déduire que si A_1 et A_2 , élements de $M_2(R)$, ne sont pas de la forme aI , $a \in R$, alors A_1 et A_2 sont semblables, si et seulement si, $tr(A_1) = tr(A_2)$ et $det(A_1) = det(A_2)$.

6. Caractérisation des commutateurs dans $M_2(R)$.

6. a - Soient $a \neq 0$ un nombre réel tel que $a^2 \neq 1$, $A \neq \pm I$ une matrice de $SL(2,R)$. Montrer qu'il existe $b \in R$ tel que $X(b)$ soit semblable à A. En déduire que si $A \neq -I$ est un élément de $SL(2,R)$, alors $A = UVU^{-1}V^{-1}$, où U et V appartiennent à $SL(2,R)$.

6. b - Soient $U \in SL(2,R)$, $V \in GL(2,R)$ tels que $UV = -VU$. Montrer que $tr(U) = 0$ et que U est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire que V n'appartient pas à $SL(2,R)$ et déterminer l'ensemble des commutateurs $ABA^{-1}B^{-1}$, où A et B décrivent $SL(2,R)$.

7. Décomposition en produit de deux matrices symétriques dans $M_2(R)$.

Soit A une matrice de $M_2(R)$. D'après 3.b., $A = S_1S_2$ où S_1 et S_2 sont des matrices symétriques complexes et où S_2 est inversible. On pose

$$S_2^{-1} = T_1 + i\,T_2 \ , \quad S_1 = T_1' + i\,T_2' \quad \text{où} \quad i^2 = -1$$

et où T_1 , T_2 , T_1' , T_2' sont des matrices à coefficients réels.

7. a - Montrer que pour tout nombre complexe λ , $A(T_1 - \lambda T_2) = T_1' + \lambda T_2'$. Montrer qu'il existe au moins un nombre réel λ tel que la matrice $T_1 + \lambda T_2$ soit inversible.

7. b - Montrer que toute matrice réelle d'ordre 2 , A , peut s'écrire $A = S_1' S_2'$ où S_1' et S_2' sont deux matrices symétriques réelles, et où S_2' est inversible.

8. Caractérisation des sous-groupes normaux de $SL(2,R)$.

8. a - Soit H un sous-groupe normal de $SL(2,R)$ contenant une matrice $A \neq \pm I$. Montrer que H contient une matrice de l'une des trois formes suivantes

$$X_o = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \ , \quad \lambda^2 \neq 1 \ ; \ X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ X_2 = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \ , \ c \neq 0.$$

8. b - Montrer que H contient toujours une matrice de la forme X_o.

8. c - Déterminer tous les sous-groupes normaux de $SL(2,R)$.

II

Soit E un C-espace vectoriel de dimension $n > 1$ et soit $\alpha \neq 1$ un nombre complexe tel que $\alpha^n = 1$; p désigne le plus petit des entiers r tels que $\alpha^r = 1$.

1. Montrer que p divise n.

On pose $n = pm$ et soit $(E_i)_{0 \leq i \leq p-1}$, p espaces vectoriels de dimension m tels que

$$E = \bigoplus_{i=0}^{p-1} E_i .$$

On définit un automorphisme u de E en posant

$$u(x) = \alpha^i x \ , \quad x \in E_i \ , \quad 0 \leq i \leq p-1.$$

2. Pour un automorphisme v de E , montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $uv = \alpha vu$

(ii) $v(E_i) = E_{i+1}$, pour $0 \leq i \leq p-2$, $v(E_{p-1}) = E_o$.

3. Soit $\alpha \neq 0$ un nombre complexe. Montrer que αI est un commutateur de $GL(n,C)$ si et seulement si $\alpha^n = 1$.

4. Soit α une racine primitive troisième de 1. Déterminer explicitement deux éléments U et V de $SL(3,C)$ tels que $UVU^{-1}V^{-1} = \alpha I$.

* *

page 118 E.N.S.I. de PHYSIQUE
1987 Option P-Math 2